page 170 1/5 -1992-
CONCOURS T' Math 1

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS

Dans tout le problème, on désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et par $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles indéfiniment dérivables sur I. On note D l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I)$ qui à tout élément f associe la fonction dérivée $Df = f'$; les puissances successives de D sont notées D^p pour tout entier naturel p, en convenant que $D^0 f = f$.

Une fonction f, élément de $\mathscr{C}^\infty(I)$, est dite absolument monotone si, pour tout entier $p \geqslant 0$, la fonction $D^p f$ est positive sur I. L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés de telles fonctions.

Les parties I et II sont indépendantes.

I. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS ABSOLUMENT MONOTONES

1. *Somme et produit. Dérivation. Translation.*

   a. Montrer que si f et g, éléments de $\mathscr{C}^\infty(I)$, sont absolument monotones et si α et β sont deux nombres réels positifs, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est absolument monotone sur I.

   b. Montrer que le produit fg de deux fonctions f et g absolument monotones sur I l'est aussi.

   c. Soit f une fonction absolument monotone sur I; prouver que, pour tout entier p, la dérivée $D^p f$ l'est aussi.

   d. Soit a un nombre réel, on note I_a l'intervalle déduit de I par la translation : $t \longmapsto a + t$ et, pour tout f élément de $\mathscr{C}^\infty(I)$, on note f_a la fonction définie sur I_a par $f_a(x) = f(x - a)$. Montrer que si f est absolument monotone sur I, f_a l'est aussi sur I_a.

2. *Somme d'une série entière.*

   Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence R est strictement positif (éventuellement infini). Montrer que si tous les coefficients a_n sont positifs, la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est absolument monotone sur $I = [0, R[$.

3. *Étude d'exemples.*

   a. Soient a un nombre réel et α un nombre réel strictement négatif. Montrer que la fonction $x \longmapsto (a - x)^\alpha$ est absolument monotone sur $]-\infty, a[$.

   b. Montrer que la fonction $x \longmapsto \tan x$ est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. (On exprimera $D^p \tan(x)$ sous la forme $P_p(\tan x)$ où P_p est un polynôme à coefficients entiers positifs).

   c. Montrer que la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ est absolument monotone sur $[0, 1[$.

4. *Prolongement par continuité d'une fonction absolument monotone.*

Dans cette question on suppose que $I =]a, b[$, où a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b$, et on considère une fonction f absolument monotone sur I.

a. Prouver que f se prolonge d'une manière unique en une fonction g absolument monotone sur $[a, b[$.

b. Prouver que, si f et toutes ses dérivées sont bornées sur I, la fonction f se prolonge d'une manière unique en une fonction h absolument monotone sur $]a, b]$.

5. *Fonction absolument monotone définie par une intégrale.*

Soit φ une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{xt}\, dt.$$

a. Justifier la convergence de l'intégrale.

b. Établir la continuité de f sur $]-\infty, 0[$. Pour cela, on introduira la suite (f_n) de fonctions définies sur $]-\infty, 0[$ par :

$$f_n(x) = \int_0^{n} \varphi(t)\, e^{xt}\, dt.$$

c. Prouver plus généralement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et que, pour tout entier naturel p et pour tout élément x de $]-\infty, 0[$,

$$D^p f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, t^p\, e^{xt}\, dt.$$

En conclure que f est absolument monotone sur $]-\infty, 0[$.

6. *Analyticité des fonctions absolument monotones.*

On suppose dans cette question que I est de la forme $[a, a + r[$ où a est un nombre réel et où $0 < r \leqslant +\infty$. On considère une fonction f absolument monotone sur I.

a. Montrer que, pour tout entier n et pour tout élément x de $[a, a + r[$, $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \ldots + D^n f(a)\frac{(x - a)^n}{n!} + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n D^{n+1} f(a + (x - a)t)\, dt.$$

b. Montrer que, pour tout nombre réel ρ vérifiant $0 < \rho < r$ et pour tout x de $[a, a + \rho]$,

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(a + \rho)\left(\frac{x - a}{\rho}\right)^{n+1}.$$

c. En conclure que, pour tout x appartenant à $[a, a + r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n f(a) \frac{(x - a)^n}{n!}$, et que la série du second membre converge normalement sur tout segment contenu dans $]a - r, a + r[$.

7. *Prolongement analytique d'une fonction absolument monotone.*

a. Soit f une fonction absolument monotone sur I. On suppose qu'il existe un point a intérieur à I tel que $f(a) = 0$. Prouver que f est la fonction nulle sur I. À cet effet, on introduira un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ soit contenu dans I et on prouvera, grâce à 6.*c.*, que f est nulle sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. On établira ensuite le résultat annoncé.

b. On suppose à nouveau que f est absolument monotone sur $[a, a + r[$ et que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n f(a)}{n!} u^n$ est strictement supérieur à r.

Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction absolument monotone sur $[a, a + R[$.

II. FORMES LINÉAIRES POSITIVES SUR L'ESPACE DES POLYNÔMES

On note $\mathscr{P}_+$ l'ensemble des éléments P de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout élément t de $[0, 1]$, $P(t) \geqslant 0$. On suppose donnée une suite $A = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels et on note φ_A la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie par les relations $\varphi_A(X^n) = \lambda_n$ où n parcourt $\mathbb{N}$. Une telle forme linéaire est dite positive si, pour tout **P** élément de $\mathscr{P}_+$, $\varphi_A(P) \geqslant 0$.

On se propose de caractériser les suites A telles que φ_A soit positive par des relations portant sur les nombres λ_n.

1. *Caractérisation des polynômes à valeurs strictement positives sur* $]0, 1[$.

Pour tout entier n et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $B_{n,k} = C_n^k X^k (1 - X)^{n-k}$ où les C_n^k sont les coefficients du binôme. Pour tout entier n, on note $\mathscr{B}_n$ l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients réels de la forme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k}$ où, pour tout k, $\alpha_k \geqslant 0$.

a. Montrer que si P appartient à $\mathscr{B}_p$ et si Q appartient à $\mathscr{B}_q$, PQ appartient à $\mathscr{B}_{p+q}$.

b. Soit a un nombre réel. Montrer que, si $a \leqslant 0$, $X - a$ est élément de $\mathscr{B}_1$ et que, si $a \geqslant 1$, $a - X$ est élément de $\mathscr{B}_1$.

c. Établir, pour tout entier n, les relations :

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k} = nX, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k - 1) B_{n,k} = n(n - 1) X^2.$$

En déduire que, pour tout couple (a, b) de réels et pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$(X - a)^2 + b^2 = \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\frac{k}{n} - a\right)^2 + b^2 - \frac{1}{n}\frac{k(n-k)}{n(n-1)}\right] B_{n,k}.$$

En conclure que, si $b \neq 0$, $(X - a)^2 + b^2$ est un élément de $\mathscr{B}_n$ pour n assez grand.

d. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$, montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i. Il existe un entier n tel que $P \in \mathscr{B}_n$.

ii. Pour tout élément t de $]0, 1[$, $P(t) > 0$.

Pour établir que ii. implique i., on décomposera P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

2. *Caractérisation des formes linéaires positives sur* $\mathbb{R}[X]$.

a. Soit (p, q) un couple d'entiers naturels; calculer $\varphi_A(X^q(1 - X)^p)$.

b. Prouver l'équivalence des assertions suivantes :

i. La forme linéaire φ_A est positive.

ii. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels,

$$\sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \lambda_{q+j} \geqslant 0.$$

Pour établir que ii. implique i., on montrera que, si P appartient à $\mathscr{P}_+$, la suite (P_m) de polynômes définis par $P_m = P + \dfrac{1}{m+1}$ vérifie $\varphi_A(P_m) \geqslant 0$.

3. *Formes quadratiques associées à une forme linéaire positive.*

Soit A une suite de nombres réels telle que φ_A soit positive.

a. Établir que, pour tout entier naturel p, l'application $P \longmapsto \varphi_A(P^2)$ est une forme quadratique positive sur l'espace $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes de degré $\leqslant p$.

b. Expliciter la matrice M_p associée à cette forme quadratique dans la base canonique $(1, X, X^2, ..., X^p)$ de $\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que le déterminant $\det(M_p)$ est positif.

III. FORMES QUADRATIQUES ASSOCIÉES À UNE FONCTION ABSOLUMENT MONOTONE

Dans cette partie, on se propose de prouver que si f est absolument monotone sur $I =]-\infty, 0[$, alors pour tout réel a de I et pour tout entier naturel p, la forme quadratique $\sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} D^{i+j} f(a)\, x_i\, x_j$ est positive sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

Pour tout réel $h > 0$, on note J_h l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I)$ qui, à la fonction g, associe la fonction $J_h g$ définie sur I par :

$$J_h g(x) = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} g(t)\, dt.$$

On note Δ_h l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I)$ qui, à la fonction f, associe la fonction $\Delta_h f$ définie sur I par :

$$\Delta_h f(x) = \frac{1}{h}[f(x) - f(x - h)].$$

page 174 5/5 . 1992.

CONCOURS T' Math 1

1. *Propriétés algébriques de* J_h *et* Δ_h.

a. Montrer que, pour toute constante α, $J_h \alpha = \alpha$ et que, pour toute fonction g positive, $J_h g$ est positive.

b. Établir que $\Delta_h = D \circ J_h = J_h \circ D$.

c. Prouver que, pour tout entier $p \geqslant 1$ et pour tout élément f de $\mathscr{C}^\infty(I)$, $\Delta_h^p f = J_h^p D^p f$.

2. *Application aux fonctions absolument monotones.*

Soient f une fonction absolument monotone sur $I =]-\infty, 0[$ et a un élément de I; on note A_h la suite (λ_n) définie par $\lambda_n = f(a - nh)$.

a. Prouver que, pour tout $b < 0$ et pour tout entier $p \geqslant 0$, $\Delta_h^p f(b) \geqslant 0$ et en déduire que :

$$\sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j f(b - jh) \geqslant 0.$$

On exprimera, pour cela, Δ_h en fonction de l'endomorphisme T_h de $\mathscr{C}^\infty(I)$ défini par $T_h f(x) = f(x - h)$.

Prouver plus généralement que, pour tout couple (p, q) d'entiers,

$$\sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j f(a - (q + j)h) \geqslant 0$$

et en conclure que φ_{A_h} est une forme linéaire positive.

b. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 0$, la forme quadratique $\sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} \Delta_h^{i+j} f(a)\, x_i\, x_j$ est positive sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

À cet effet, on évaluera $\varphi_{A_h}(P^2)$ où $P = \sum_{i=0}^{p} \frac{x_i}{h^i} (1 - X)^i$.

3. *Comportement de* $\Delta_h^p f$ *lorsque* $h \to 0$.

Soit a un élément de $]-\infty, 0[$ et f un élément de $\mathscr{C}^\infty(I)$.

a. Établir que, pour tout entier p et pour tout élément x de I,

$$\Delta_h^p f(x) - D^p f(a) = J_h^p [D^p f - D^p f(a)](x).$$

b. Établir que, pour tout élément g de $C^\infty(I)$ et pour tout nombre réel $r \geqslant 0$:

$$\operatorname{Sup}_{[a-r,\, a]} |J_h g(x)| \leqslant \operatorname{Sup}_{[a-r-h,\, a]} |g(y)|.$$

c. Prouver finalement que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$|\Delta_h^p f(a) - D^p f(a)| \leqslant ph \operatorname{Sup}_{[a-ph,\, a]} |D^{p+1} f(y)|$$

et que $\lim_{h \to 0} \Delta_h^p f(a) = D^p f(a)$.

4. *Application aux fonctions absolument monotones.*

Soit f une fonction absolument monotone sur $]-\infty, 0[$.

Montrer que, pour tout entier p et pour tout $a < 0$, la forme quadratique $\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} D^{i+j} f(a)\, x_i x_j$ est positive sur $\mathbb{R}^{p+1}$. Écrire la matrice associée à cette forme quadratique dans la base canonique.